UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 abril-julio de 2005
segundo examen parcial (30%)
9-06-2005

TIPO A

Duración : 1 hora 45 minutos.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.- (15 ptos.) Calcule las siguientes integrales :

a) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{sen}(4x).\operatorname{sen}(7x)\, dx$;

b) $\int x^3.\ln(x)dx$;

c) $\int \operatorname{sech}(x)\, dx$.

2.- (8 ptos.)

a) Halle la derivada de la función $f(x) = (1+\operatorname{sen}(x))^{2\cosh(x)}$;

b) halle la ecuación de la recta tangente en A(0, 1) a la gráfica de f(x).

3.- (7 ptos.) Demuestre que $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

SOLUCIONES.

a) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{sen}(4x).\operatorname{sen}(7x)\, dx$;

Restando miembro a miembro las dos fórmulas :

cos(a-b)=cos(a)cos(b)+sen(a)sen(b)

cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b) se obtiene :

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 abril-julio de 2005
segundo examen parcial (30%)
9-06-2005

TIPO A

Duración : 1 hora 45 minutos.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

2sen(a)sen(b) = cos(a-b)-cos(a+b) , por lo cual :

$\text{sen}(4x)\text{sen}(7x) = \frac{1}{2}[\cos(3x) - \cos(11x)]$ de manera que :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \text{sen}(4x).\text{sen}(7x)\,dx = \frac{1}{6}[\text{sen}(3x)]_{\pi/4}^{\pi/3} - \frac{1}{22}[\text{sen}(11x)]_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= \frac{1}{6}[\text{sen}(\pi) - \text{sen}(3\pi/4)] - \frac{1}{22}[\text{sen}(-\pi/3) - \text{sen}(3\pi/4)] =$$

$$= \frac{1}{6}[0 - \frac{\sqrt{2}}{2}] + \frac{1}{22}[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}] = \frac{\sqrt{3}}{44} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{22} - \frac{1}{6}) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{44} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{4}{33}) = \frac{\sqrt{3}}{44} - \frac{2\sqrt{2}}{33}.$$

b) $\int x^3.\ln(x)dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \int \frac{x^4}{4}.\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16} + C.$

c) $\int \text{sech}(x)\,dx = .\int \frac{2.dx}{e^x+e^{-x}}$ = [sustituyendo $u=e^x$, $x=\ln(u)$]

$$= \int \frac{2.du/u}{u + 1/u} = \int \frac{2.du}{u^2+1} = 2.\text{arctg}(u) = 2.\text{arctg}(e^x) + C.$$

2.- $f(x) = (1+\text{sen}(x))^{2\cosh(x)} = e^{2\cosh(x).\ln(1+\text{sen}(x))}$;

$$f'(x) = (1+\text{sen}(x))^{2\cosh(x)}[2\text{senh}(x).\ln(1+\text{sen}(x)) + 2\cosh(x)\frac{\cos(x)}{1+\text{sen}(x)}]$$

$f'(0) = 1.[0 + 2] = 2$; ecuación de la recta tangente en A : $\frac{y-1}{x} = 2$; $y = 2x+1$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 abril-julio de 2005
segundo examen parcial (30%)
9-06-2005

TIPO A

Duración : 1 hora 45 minutos.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

3.- Demuestre que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Alternativa #1 : Demostraremos que la función f, definida por

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$, es la función nula .

Derivando f :
[usando el teorema fundamental del cálculo para derivar el primer sumando del segundo miembro]
se obtiene : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, lo cual implica [por una consecuencia del teorema del valor medio] que $f(x)= K =$ constante $= f(0)$; por otra parte tenemos

$$f(0) = \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt - \ln(0+\sqrt{1+0^2}) = 0 + \ln(1) = 0$$

Alternativa #2 : sustituyendo $t = \operatorname{senh}(u)$; $dt = \cosh(u)\,du$;

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int \frac{\cosh(u)du}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2(u)}} = \int du = u = \operatorname{arcsenh}(t) + C = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C \;;$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big]_0^x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln(1) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) .$$